PAPRASČIAUSIAS VARIACINIO SKAIČIAVIMO UŽDAVINYS

Ekstremumai

Variacinis uždavinys

$$\begin{gathered} \underset{y(x)}{\operatorname{extr}} \int_a^b F\big(x, y(x), y'(x)\big)\, dx, \\ y(a) = A,\ y(b) = B \end{gathered} \tag{1}$$

Bandomosios funkcijos

$$\tilde{y}(x) = y(x) + \varepsilon\eta(x), \quad \eta(a) = \eta(b) = 0,\ \eta(x) \in \mathrm{C}_0^1(a,b).$$

Funkcijų $\eta(x)$ pavyzdžiai:

$$\begin{aligned} \eta(x) &= (x-a)(x-b)f(x), \\ \eta(x) &= \sin\left(k\pi\frac{x-a}{b-a}\right)f(x), \\ \eta(x) &= \big(f(x)-f(a)\big)\big(f(x)-f(b)\big) \end{aligned}$$

Stiprusis ekstremumas

Aibė M_0 (stiprioji arba 0 eilės aplinka)

$$M_0:\ y,\ \tilde{y} \in M,\ \varepsilon > 0\ \text{ ir } \max_{x\in[a,b]}\big|\tilde{y}(x) - y(x)\big| < \varepsilon.$$

Funkcija $y = y(x) \in M$ suteikia funkcionalui $I(y) = \int_a^b F\big(x, y, y'\big)\, dx$ *stiprųjį* ekstremumą, jeigu

$$\text{arba} \quad I(y) \le I(\tilde{y}), \quad \text{arba} \quad I(y) \ge I(\tilde{y}), \quad \forall \tilde{y} \in M_0.$$

Silpnasis ekstremumas

Aibė M_1 (silpnoji arba I eilės aplinka)

$$M_1:\ y,\ \tilde{y} \in M,\ \varepsilon > 0 \text{ ir } \max_{x\in[a,b]}\big|\tilde{y}(x) - y(x)\big| + \max_{x\in[a,b]}\big|\tilde{y}'(x) - y'(x)\big| < \varepsilon.$$

Funkcija $y = y(x) \in M$ suteikia funkcionalui $I(y) = \int_a^b F\big(x, y, y'\big)\, dx$ *stiprųjį* ekstremumą, jeigu

$$\text{arba} \quad I(y) \le I(\tilde{y}), \quad \text{arba} \quad I(y) \ge I(\tilde{y}), \quad \forall \tilde{y} \in M_1.$$

Pavyzdys 1.

$$I(y) = \int_0^{2\pi} y^2 \left(2 - y'^2\right) dx, \;\; y(0) = y(2\pi) = 0.$$

Funkcija $y = 0$ suteikia silpnąjį ekstremumą, nes jei

$$\max_{x\in[0,2\pi]} \left|\tilde{y}(x) - y(x)\right| + \max_{x\in[0,2\pi]} \left|\tilde{y}'(x) - y'(x)\right| = \max_{x\in[0,2\pi]} \left|\tilde{y}(x)\right| + \max_{x\in[0,2\pi]} \left|\tilde{y}'(x)\right| < \varepsilon,$$

tai $I(\tilde{y}) \geq I(y) = 0, \;\; \forall \varepsilon < 1.$ Taigi funkcija $y = 0$ suteikia funkcionalui *silpnąjį* minimumą.

Tegul vėl $\varepsilon < 1$. 0 eilės (stipriąją) aplinką sudaro funkcijos $y = \tilde{y}(x)$, jei

$$\max_{x\in[0,2\pi]} \left|\tilde{y}(x) - y(x)\right| = \max_{x\in[0,2\pi]} \left|\tilde{y}(x)\right| < \varepsilon \,.$$

Jei, pavyzdžiui, $\tilde{y}(x) = \dfrac{\sin(n^2 x)}{n}$, tai

$I(\tilde{y}) = \dfrac{\pi(8 - n^2)}{4n^2} < 0, n > 3$. (t.y., $y = 0$ nėra *stiprusis* minimumas).

Pavyzdys 2.

$$I(y) = \int_0^1 y'^2 \, dx, \;\; y(0) = 0, \; y(1) = 1.$$

Funkcija $y = x$ suteikia *absoliutųjį* minimumą, nes jei $\tilde{y}(x) = y(x) + \eta(x)$, čia $\eta(0) = \eta(1) = 0$, tai

$$I(\tilde{y}) - I(y) = \int_0^1 \left(y' + \eta'\right)^2 - y'^2 \, dx = \int_0^1 2y'\eta' + \eta'^2 \, dx = \int_0^1 \eta'^2 \, dx \geq 0,$$

nes $\int_0^1 2y'\eta' \, dx = 2\int_0^1 \eta' \, dx = 2\eta(x)\Big|_0^1 = 0$.

Būtina ekstremumo sąlyga. Eulerio diferencialinė lygtis

Variacinis uždavinys

$$\begin{gathered}\operatorname*{extr}_{y(x)} \int_a^b F\big(x, y(x), y'(x)\big)\,dx,\\ y(a) = A,\ y(b) = B\end{gathered} \tag{1}$$

Funkcionalas

$$\Phi(\varepsilon) = I(\tilde{y}) = I(y + \varepsilon\eta) = \int_a^b F\big(x, y(x) + \varepsilon\eta(x), y'(x) + \varepsilon\eta'(x)\big)\,dx\,.$$

Jei $y = y(x)$ suteikia funkcionalui (1) ekstremumą, tai $\varepsilon = 0$ yra funkcijos $\Phi(\varepsilon)$ ekstremumo taškas, todėl

$$\Phi'(0) = 0\,.$$

Eulerio lygtis $\quad F'_y\big(x, y, y'\big) - \dfrac{d}{dx} F'_{y'}\big(x, y, y'\big) = 0\,.$

$$\begin{gathered}\Phi'(0) = \frac{d}{d\varepsilon}\int_a^b F\big(x, y + \varepsilon\eta, y' + \varepsilon\eta'\big)\,dx\bigg|_{\varepsilon = 0} =\\ \int_a^b F'_y\big(x, y, y'\big)\eta + F'_{y'}\big(x, y, y'\big)\eta'\,dx.\end{gathered}$$

Kadangi $\eta(a) = \eta(b) = 0$, tai

$$\begin{gathered}\int_a^b F'_{y'}\big(x, y, y'\big)\eta'\,dx = \int_a^b F'_{y'}\big(x, y, y'\big)\,d\eta =\\ \underbrace{F'_{y'}\eta(x)\bigg|_a^b}_{=0} - \int_a^b \frac{d}{dx} F'_{y'}\big(x, y, y'\big)\eta\,dx\end{gathered}$$

ir

$$\Phi'(0) = \int_a^b \left[F'_y\big(x, y, y'\big) - \frac{d}{dx} F'_{y'}\big(x, y, y'\big)\right]\eta\,dx = 0$$

tai iš čia

$$F'_y\big(x, y, y'\big) - \frac{d}{dx} F'_{y'}\big(x, y, y'\big) = 0\,.$$

Variacinio uždavinio ekstremale vadinsime kiekvieną Eulerio diferencialinės lygties sprendinį.
Todėl tik ekstremalė gali suteikti funkcionalui ekstremumą.

Pavyzdys.

Rasti uždavinio $\operatorname{extr} \int_0^1 e^x \left(y^2 + \frac{y'^2}{2} \right) dx, \quad y(0) = 1,\ y(1) = e$ ekstremales.

$$F = e^x \left(y^2 + \frac{y'^2}{2} \right), \quad F'_y = 2e^x y, \quad F'_{y'} = e^x y', \qquad \frac{d}{dx} F'_{y'} = e^x \left(y'' + y' \right).$$

Eulerio lygtis: $F'_y - \frac{d}{dx} F'_{y'} = 0$	$-e^x \left(y'' + y' - 2y \right) = 0$
Bendrasis sprendinys (visos ekstremalės)	$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}$
Atskiras sprendinys (variacinio uždavinio ekstremalė)	$\begin{cases} y(0) = 1, \\ y(1) = e, \end{cases} \Rightarrow \ y(x) = e^x$

Bandomųjų funkcijų $\tilde{y} = y(x) + \eta(x), \quad \eta(a) = \eta(b) = 0$ taikymas

$$\eta(x) = (x-a)(x-b)f(x),$$

$$\eta(x) = \sin\left(k\pi \frac{x-a}{b-a} \right) f(x), \ldots$$

Pavyzdyje

$$\int_0^1 e^x \left(y^2 + \frac{y'^2}{2} \right) \Bigg|_{y = e^x} dx = \frac{e^3 - 1}{2} = 9.542768\ldots,$$

$$\int_0^1 e^x \left(y^2 + \frac{y'^2}{2} \right) \Bigg|_{y = e^x + \varepsilon x(x-1)} dx = \frac{e^3 - 1}{2} + \underbrace{\frac{33e - 89}{2}}_{\approx 0.35165} \varepsilon^2,$$

$$\int_0^1 e^x \left(y^2 + \frac{y'^2}{2} \right) \Bigg|_{y = e^x + \varepsilon \sin(k\pi x)} dx = \frac{e^3 - 1}{2} + \frac{5}{2} \varepsilon^2 k^2 \pi^2 (e - 1).$$

Todėl jei ekstremalė $y = e^x$ funkcionalui suteikia ekstremumą, tai šis ekstremumas yra minimumas.

PAKANKAMOS EKSTREMUMO SĄLYGOS

Jakobio būtina ekstremumo sąlyga:

Uždavinys

$$\left(F''_{yy} - \frac{d}{dx}F''_{yy'}\right)u(x) - \frac{d}{dx}\left(F''_{y'y'}u'(x)\right) = 0,\ \ u(a) = 0$$

turi sprendinį $u(x) \neq 0$ intervale $x \in (a,b]$. Čia išvestinės $F''_{yy}, F''_{yy'}, F''_{y'y'}$ apskaičiuojamos ekstremalės $y(x)$ taške.

Pavyzdyje $\operatorname{extr}\int_0^1 e^x\left(y^2 + \frac{y'^2}{2}\right)dx,\quad y(0)=1,\ y(1)=e$

$$F = e^x\left(y^2 + \frac{y'^2}{2}\right),\quad F'_y = 2e^x y,\quad F'_{y'} = e^x y'$$, todėl

$$F''_{yy} = 2e^x,\quad F''_{yy'} = 0,\quad F''_{y'y'} = e^x,$$

ir Jakobio lygtis ekstremalės $y(x) = e^x$ taške

$$-e^x\left(u'' + u' - 2u\right) = 0,$$

jos visi sprendiniai, tenkinantis sąlygą $u(a) = u(0) = 0$, yra

$$u(x,C) = C\left(e^x - e^{-2x}\right)$$

Kadangi $u(x,1) = e^x - e^{-2x} = 0$ tik kai $x = 0$, tai Jakobio sąlyga išpildoma ir ekstremalė $y(x) = e^x$ gali suteikti ekstremumą.

Ležandro pakankamos ekstremumo sąlygos:

Jei išpildyta Jakobio sąlyga ir $F''_{y'y'}\left(x, y, y'\right) > 0$, kai $y = y(x)$ ekstremalė, tai ši ekstremalė suteikia funkcionalui *silpną* minimumą.

Jei išpildyta Jakobio sąlyga ir $F''_{y'y'}\left(x, y, y'\right) \geq 0$, artimuose ekstremalei $y = y(x)$ taškuose (x, y) ir visoms y' reikšmėms, tai ši ekstremalė suteikia funkcionalui *stiprų* minimumą.

Pavyzdyje

$$\text{extr}\int_0^1 e^x \left(y^2 + \frac{y'^2}{2}\right) dx, \quad y(0) = 1,\ y(1) = e$$

$F''_{y'y'} = e^x > 0$, todėl ekstremalė $y = y(x)$ suteikia funcionalui stiprų minimumą lygų

$$\int_0^1 e^x \left(y^2 + \frac{y'^2}{2}\right)\Bigg|_{y = e^x} dx = \frac{e^3 - 1}{2} = 9.542768...$$

Vejerštraso pakankamos ekstremumo sąlygos:

Vejerštraso funkcija: $E\left(x,y,y',p\right)=F\left(x,y,y'\right)-F\left(x,y,p\right)-\left(y'-p\right)F_p'\left(x,y,p\right)$

Jei išpildyta Jakobio sąlyga ir $E\left(x,y,y',p\right)\geq 0$, artimuose ekstremalei $y=y(x)$ taškuose (x,y) ir y' reikšmėms artimoms *p*, tai ši ekstremalė suteikia funkcionalui *silpną* minimumą. Čia *p* yra ekstremalės, einančios per tašką (x,y), krypties koeficientas.

Jei išpildyta Jakobio sąlyga ir $E\left(x,y,y',p\right)\geq 0$, artimuose ekstremalei $y=y(x)$ taškuose (x,y) ir visoms y' reikšmėms, tai ši ekstremalė suteikia funkcionalui *stiprų* minimumą.

Pavyzdyje $E=e^x\left(y^2+y'^2/2\right)-e^x\left(y^2+p/2\right)-\left(y'-p\right)e^x p=\frac{1}{2}e^x\left(y'-p\right)^2\geq 0$, todėl ekstremalė $y=y(x)$ suteikia funkcionalui stiprų minimumą.